

Anwendung der Geometrischen Modellierung auf Trassierungen im dreidimensionalen Geländemodell

V. Berkhahn, F. Sellerhoff

Kurzfassung: *Im Rahmen dieses Beitrags wird eine allgemeine, abstrahierte Vorgehensweise für die Trassenmodellierung unabhängig von den zur Verfügung stehenden Trassierungselementen vorgestellt. Das Resultat dieser Trassenmodellierung mit dreidimensionalen B-Spline-Kurven ist ein Vorentwurf für eine endgültige Trassierung, der anschließend auf die anwendungsspezifischen Anforderungen anzupassen ist. Etablierte Methoden und Techniken der graphischen Datenverarbeitung und der Freiformkurvenmodellierung werden hierbei auf Anwendungsgebiete des Bauingenieurwesens übertragen.*

1 Einleitung

Entwurf einer Trasse: Der Entwurf und die Konstruktion von Trassen gehören zu den Standardaufgaben im Ingenieurwesen. Als beispielhafte Anwendungsgebiete sind das Schienen- und Straßenverkehrswesen und die Ver- und Entsorgungstechnik zu nennen. In Abhängigkeit von dem jeweiligen Anwendungsgebiet werden unterschiedliche Anforderungen an die Trassierung gestellt. Hierbei stehen dem Konstrukteur entsprechende Zeichen- und Konstruktionshilfen in Form von Kurvenschablonen und Tabellenwerken zur Verfügung.

Dreidimensionales Modell: In der Regel werden für die Konstruktion getrennte Modelle in verschiedenen Darstellungsvarianten herangezogen. So werden im Verkehrswesen für die Trassierung im Grundriß andere Trassierungselemente herangezogen als bei der Konstruktion im Höhenplan. In diesem Beitrag wird für die Trassenmodellierung ein einheitliches, dreidimensionales Modell verwendet. Die Modellierung und Diagnose der Trasse erfolgen in beliebigen Ansichten dieses Modells. Die jeweiligen Diagnosen sind simultan zum Modellierungsprozeß in den verschiedenen Ansichten verfügbar.

Geometrische Modellierung: Als Trassierungselemente stehen in der Regel Gerade, Kreis, Parabel und Klotoide zur Verfügung. Neben der Lage- und Tangentenstetigkeit wird bei der Trassierung in der Regel ein kontinuierlicher, linear veränderlicher Krümmungsverlauf gefordert. Als einziges Trassierungselement steht hier die Spline-Kurve zur Verfügung. Hierbei wird die Stetigkeit in Lage, Tangente und Krümmung durch die mathematische Repräsentation als B-Spline-Kurve sichergestellt. Der Verlauf der Krümmung kann jedoch nicht linear sein.

2 Geländemodell

Geländemodell: Das dreidimensionale Geländemodell besteht aus Punkten, Kanten und Flächen. Die Punkte des Geländemodells basieren auf diskreten Meßpunkten $P_i [x,y,z]$ aus dem realen Gelände. Zwischen den Meßpunkten existiert weder eine Nachbarschaftsinformation noch eine Information über den Verlauf der Geländeoberfläche. Mit der Erstellung eines Geländemodells wird die in diskreten Punkten vorliegende Information in eine "flächenhafte" Information überführt. Zwischen den Punkten P_i wird ein Dreiecksnetz benötigt, um die benachbarten Punkte des Punktes Q für die Interpolation der Höhenkoordinaten zu bestimmen. Bei der Triangulation der Meßpunkte werden die Punkte des Geländemodells durch Kanten verbunden und jeweils drei Kanten zu einem Dreieck zusammengefaßt.

Unbeschränkte Triangulation: Bei der Triangulation wird zwischen der Vermaschung von unbeschränkten und beschränkten Gebieten unterschieden [1]. Bei unbeschränkten Gebieten wird das sich ergebende Gebiet innerhalb der konvexen Hülle vermascht. Bei beschränkten Gebieten wird durch die Vorgabe von Randkanten ein bestimmter Verlauf des Randes erzwungen. Auf diese Weise kann durch das Definieren von Löchern oder Rändern die Erzeugung von Kanten erzwungen werden, die dem zu Grunde liegenden Vermaschkriterium nicht genügen. In der vorliegenden Implementation wird vereinfachend von einer unbeschränkten Triangulation ohne Löcher ausgegangen. In der Ebene kann eine Triangulierung aus der konvexen Hülle der Punktmenge durch Einfügen von sich nicht kreuzenden Kanten erzeugt werden.

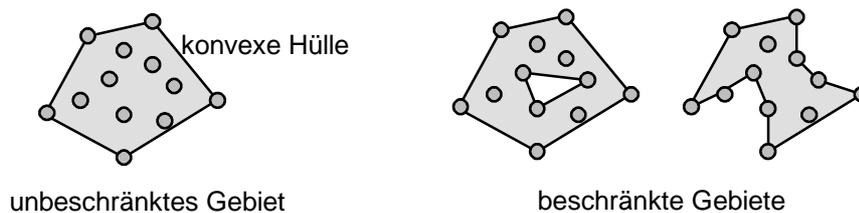
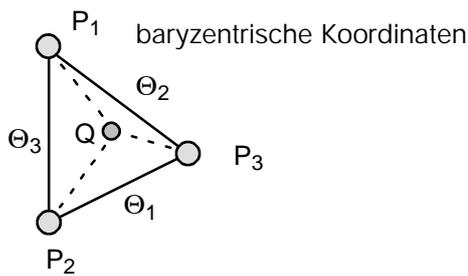


Bild 1: Unbeschränkte und beschränkte Gebiete

Delaunay-Kriterium: Für eine beliebige Punktmenge im zweidimensionalen Raum existieren verschiedene Methoden der Triangulation. Es lassen sich jedoch Zerlegungen konstruieren, die für unbeschränkte Gebiete einem bestimmten Kriterium genügen. Die Delaunay-Triangulation ist eine solche Triangulation. Hierbei wird der minimale Winkel des Dreiecksnetzes maximiert. Die Eigenschaft, benachbarte Punkte durch Kanten zu verbinden, läßt sich für Interpolationsaufgaben vorteilhaft verwenden. Hierbei erfüllt die Triangulation ein globales Kriterium, das Delaunay-Kriterium. Das Delaunay-Kriterium führt im unbeschränkten Fall zu eindeutigen, im Grenzfall zu gleichwertigen Triangulationen. Bei der beschränkten Triangulation können Kanten auftreten, die dem Delaunay-Kriterium nicht genügen.

Lineare Interpolation: Das Ergebnis einer unbeschränkten Triangulation ist eine Menge von Dreiecken mit Verweisen auf jeweils drei Punkte des Geländemodells. Entsprechend der Interpolationsvorschrift für die Höhenkoordinaten aller Punkte innerhalb des betrachteten Dreiecks müssen die Meßpunkte herangezogen werden, auf die dieses Dreieck verweist. Zweckmäßig für die Interpolation im Dreieck ist die Verwendung von normierten,

baryzentrischen Koordinaten. Die baryzentrischen Koordinaten Θ_i stellen die Gewichte dar, mit denen die Höhenkoordinaten der einzelnen Punkte des Dreiecks zum interpolierten Höhenwert beitragen.



$$\theta_i = \frac{A_i}{A_{\text{ges}}} \text{ mit } \sum \theta_i = 1 \quad (1)$$

$$z_{\text{Q MinimalMinimal}} = f(x, y) = \sum_{i=1}^3 \theta_i z_i \quad (2)$$

Bild 2: Baryzentrisches Koordinatensystem für die lineare Interpolation

3 Trassenmodell

3.1 Geometrische Modellierung

Trassierung im Grundriß: Bei dieser Vorgehensweise der Trassierung im Grundriß stehen die Trassierungselemente Gerade, Klotoide und Kreis zur Verfügung. Zur Gewährleistung der fahrdynamischen Anforderung der Tangentenstetigkeit wird zwischen den Trassierungselementen Gerade und Kreis das Übergangselement Klotoide mit linear veränderlichem Krümmungsverlauf eingesetzt. Beim Entwurf einer Trasse hat der Planer zu entscheiden, in welchen Bereichen Geraden und Kreise gewählt werden und wo Klotoiden als Übergangselemente erforderlich sind. Eine Änderung der Trasse ist häufig mit einer Änderung der Topologie der Trassierungselemente verbunden. Eine geschlossene, mathematische Darstellung der Trasse ist im allgemeinen nicht möglich.

Konstruktion im Höhenplan: Die zunächst im Grundriß entworfene Trasse ist im Höhenplan weiter zu bearbeiten. Unter Beachtung der maximal zulässigen Steigung und der Minimierung des Aushubs bzw. der Aufschüttung wird der Höhenverlauf der Trasse mit Geraden und Parabeln konstruiert. Die Trassierung im Grundriß und die Konstruktion im Höhenplan sind zwei separate Konstruktionsschritte. Eine Beziehung der Trassierungs- bzw. Konstruktionselemente im Grundriß und im Höhenplan existiert nicht.

Dreidimensionale Modellierung der Trasse: Die dreidimensionale Modellierung der Trasse erfolgt nicht in separaten Konstruktionsschritten im Grundriß und im Höhenplan. Diese Vorgehensweise sieht das Editieren einer dreidimensionalen Kurve in verschiedenen Ansichten vor. Die hier gewählte Art der Kurvenbeschreibung soll von sich aus die Tangentenstetigkeit der Trasse sicherstellen. Die Kurve soll durch Editieren von Kontrollpunkten an die jeweiligen Geländebedingungen anpaßbar sein. Der Verlauf der Kurve soll innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte liegen, um die Kurve kontrolliert manipulieren zu können. Da die Kurve in verschiedenen Ansichten editiert werden soll, muß die Kurve invariant bezüglich affiner Abbildungen sein. Aus diesen Gründen wird für die Modellierung der Trasse eine Kurvenrepräsentation gewählt, die auf Bézier-Kurven basiert. Bézier-Kurven haben jedoch den Nachteil, daß eine hohe Flexibilität der Kurve, die für das Anpassen an die jeweiligen Geländebedingungen erforderlich ist, nur mit hohen Ansatzordnungen erreichbar ist. Um hohe Ansatzordnungen zu vermeiden und einen lokal begrenzten Einfluß der Kontrollpunkte zu erreichen, werden für die Trassenmodellierung segmentierte Kurven gewählt, die auf Bézier-Kurven basieren.

3.2 Mathematische Grundlagen

Parametrische Kurvendarstellung: Der Verlauf der Kurve $\mathbf{x}(t)$ wird in Abhängigkeit vom Parameter t gegeben, um im Gegensatz zu der expliziten Form einen eindeutigen Kurvenverlauf zu gewährleisten. Dies bedeutet, daß die Komponenten x, y, z eines Kurvenpunktes $\mathbf{x}(t)$ unabhängige Funktionen von t sind. Das Parameterintervall wird hierbei üblicherweise auf das Intervall zwischen 1 und 0 bezogen:

$$\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T \quad \text{mit } \mathbf{x} \in E^3, t \in [0,1] \quad (3)$$

Bézier-Kurven: Bézier-Kurven lassen sich entsprechend dem de-Casteljau-Algorithmus auf die rekursive, lineare Interpolation mit dem gegebenen Parameter t zwischen den Kontrollpunkten \mathbf{b}_i bzw. den Kontrollpunkten \mathbf{b}_i^r der r -ten Rekursionsstufe interpretieren [2],[3]. Bei $r+1$ Kontrollpunkten liegt \mathbf{b}_0^r auf der Bézier-Kurve. Es wird deutlich, daß sich der Kurvenverlauf durch die Lage der Kontrollpunkte manipulieren läßt und die resultierende Kurve innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte liegt.

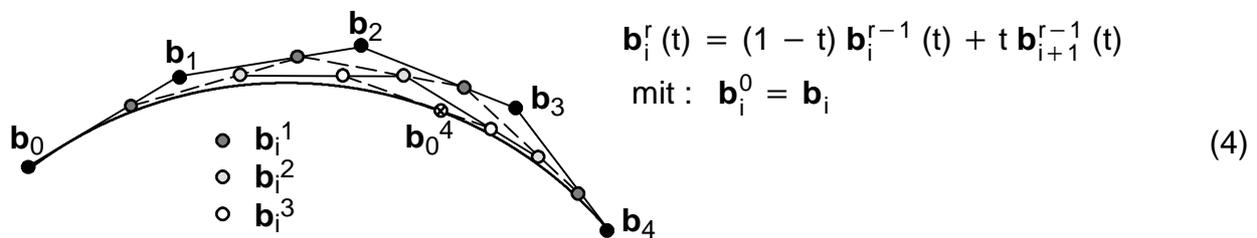


Bild 3: Bézierkurve nach dem de Casteljau-Algorithmus

Die Tangentenrichtungen an den Anfangs- und Endpunkten der Kurve werden durch die Anfangs- und Endkanten des Kontrollpolygons festgelegt. Bei einem tangentialen Anschluß zweier Bézier-Kurven müssen die entsprechenden ersten beiden und letzten beiden Kontrollpunkte kollinear sein. Mit Hilfe der Bernstein-Polynome $B_i^n(t)$ läßt sich die Bézier-Kurve $\mathbf{x}(t)$ wie folgt darstellen, wobei n den Grad des Bernstein-Polynoms angibt:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_{i,n}^n(t) \quad \text{mit } \mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in E^3,$$

$$B_{i,n}^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{für } i = 0, \dots, n \quad (5)$$

B-Spline-Kurven: Um die geforderte Flexibilität für die Kurvenmodellierung sicherzustellen, werden mehrere Bézier-Kurven-Segmente zu einer Spline-Kurve zusammengefaßt [2],[3]. Bei einer Spline-Kurve sind unter Berücksichtigung der Forderung von tangentialen Segmentübergängen nicht alle Kontrollpunkte in der Lage frei wählbar. Werden nur die unabhängig wählbaren Kontrollpunkte abgelegt, spricht man von Basis- bzw. B-Spline-Kurven. Mit N als Anzahl der Segmente und K als Grad der B-Spline-Kurve läßt sich der Träger- bzw. Knotenvektor \mathbf{u} mit den globalen Knotenparametern u_i definieren.

$$\mathbf{u} = [u_0, \dots, u_{N+K+1}]^T \quad \text{mit } N, K \in \mathbb{N}; N \geq K \geq 1; u_i \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Zwischen zwei globalen Knotenparametern u_i und u_{i+1} kann der jeweilige lokale Parameter t_i linear interpoliert werden. Die B-Spline-Funktionen N_i^0 bzw. N_i^r werden rekursiv definiert.

$$N_{\text{Minimali}}^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u \in [u_i, u_{i+1}[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i = 0, \dots, N \quad (7)$$

$$N_{\text{Minimali}}^r(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+r} - u_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{u_{i+r+1} - u}{u_{i+r+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u) \quad \text{für } \begin{matrix} r = 1, \dots, N+K \\ i = 0, \dots, N+K-r \end{matrix}$$

Mit dem Knotenvektor \mathbf{u} und den B-Spline-Funktionen N_i^K und den de-Boor-Punkten \mathbf{d}_i als Kontrollpunkten ergibt sich die B-Spline-Kurve.

$$\mathbf{x}(u) = \sum_{i=0}^N \mathbf{d}_i N_{\text{Minimali}}^K(u) \quad \text{mit } N, K \in \mathbb{N}; N \geq K \geq 1; \mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N \in E^3; u \in [u_K, u_{N+1}] \quad (8)$$

Der Verlauf von Bézier-Kurven und B-Spline-Kurven läßt sich durch Verschieben der Kontrollpunkte \mathbf{b}_i bzw. \mathbf{d}_i manipulieren. Im Gegensatz zu Bézier-Kurven ergibt sich bei B-Spline-Kurven zusätzlich die Möglichkeit, die Kurve durch Veränderung des Knotenvektors zu beeinflussen. Beispielsweise entsteht bei K -fachen Knoten ein Knick in der B-Spline-Funktion und somit ein Knick in der B-Spline-Kurve.

Spezifikation der B-Spline-Kurve für die Trasse: Um die Modellierung der Trassenkurve möglichst einfach zu halten, wird ein uniformer Trägervektor gewählt, d.h. die Knotenparameter u_i sind äquidistant verteilt. Um einen Verlauf der Kurve durch die Anfang- und Endkontrollpunkte zu erreichen, werden die Anfang- und Endknotenparameter im Trägervektor K -fach gewählt. Im Inneren der B-Spline-Kurve werden keine mehrfachen Knotenparameter zugelassen, um Knicke in der Lage oder in der Tangentenrichtung zu vermeiden.

4 Diagnosefunktionen

In der hier vorgestellten Implementierung stehen diverse Diagnosefunktionen für das Gelände und die Trasse zur Verfügung. Die Geländebedingungen können mit Hilfe von Höhenlinien und aussagekräftigen Einfärbungen der Geländeoberfläche diagnostiziert werden. Nach jeder Trassenmodifikation können eine Diagnose und Bewertung bezüglich der Länge sowie der Einhaltung vorgegebener Steigungs- und Krümmungswerte durchgeführt werden. Mit der relativen Trassenhöhe in Bezug auf die Geländeoberfläche kann simultan zum Entwurfsprozess jederzeit eine gute Abschätzung des Bodenaushubs bzw. der Aufschüttung erfolgen.

5 Anwendungsbeispiel

An Hand einer generierten Geländetopographie mit 290 Punkten wird die Vorgehensweise dieser Trassenmodellierung geschildert. Zunächst werden vom Anwender Kontrollpunkte

bezüglich der x - und y -Koordinaten festgelegt. Als Ausgangswerte für die Höhenkoordinate z werden die Kontrollpunkte automatisch auf die Geländeoberfläche projiziert. Gleichzeitig erfolgt die Darstellung der Diagnoseinformation dieser Ausgangstrasse in den jeweiligen Ansichten und im Höhenplan. Jede nachfolgende Manipulation eines Kontrollpunktes kann hinsichtlich der Auswirkung auf die Trassendiagnose bewertet werden.

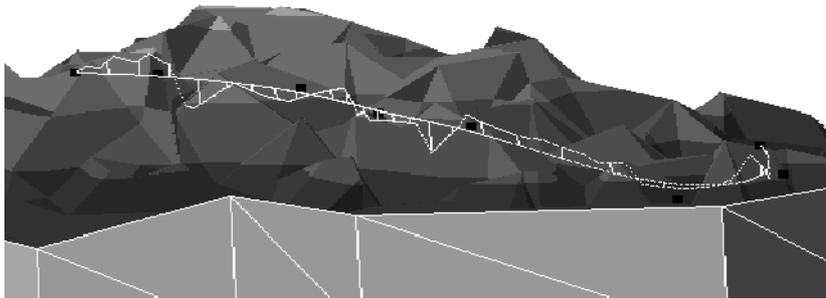


Bild 4: Darstellung der Trasse im dreidimensionalen Geländemodell [4]

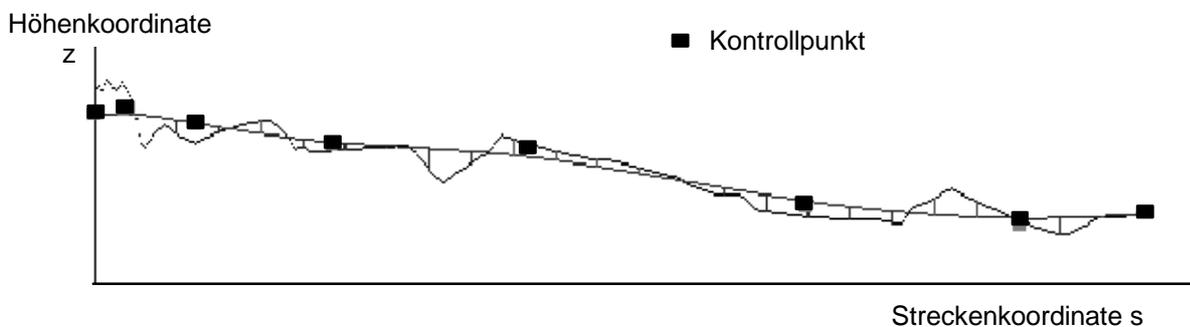


Bild 5: Darstellung der Trasse im Höhenplan [4]

6 Ausblick

Um eine einheitliche Modellierung der Trasse in Längs- und Querrichtung zu ermöglichen, ist die Betrachtung eines begleitenden Dreibeins auf der B-Spline-Kurve erforderlich. Mit den Differentialgleichungen von Frenet ist die Torsion von Raumkurven als Maß für die Abweichung der Kurve aus der Ebene bestimmbar. Die Torsion der Trassenkurve wird für die Modellierung in Trassenquerrichtung benötigt. Hierdurch wird eine genaue Berechnung der für den Bau der Trasse erforderlichen Bodenbewegungen ermöglicht.

7 Literatur

- [1] Sellerhoff, F.: Objektorientiertes Modell für simpliziale Zerlegungen im n -dimensionalen Raum; Diplomarbeit; Institut für Bauinformatik, Universität Hannover; März 1995
- [2] Farin, G.: Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design; Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH; Braunschweig, Wiesbaden; 1994
- [3] Hoscheck, J.; Lasser, D.: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung; B.G. Teubner; Stuttgart; 1992

- [4] Thiemann, O.; Schumacher, A.: Modellierung einer allgemeinen Trasse auf einem dreidimensionalem Geländemodell; Studienarbeit; Institut für Bauinformatik, Universität Hannover; Juni 1996